PRODUIT SCALAIRE (DANS LE PLAN)

I. Produit scalaire

A) Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan .

Le produit scalaire de $\vec{u}$ **par** $\vec{v}$ noté $\vec{u}$ **.** $\vec{v}$ est le nombre défini par l'une des égalités équivalentes suivantes :

- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$

- $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ où (x, y) et (x' , y') sont les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé quelconque.

- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{OA}.\vec{OB}$ et on note H le projeté orthogonal de B sur (OA) alors
$$\vec{u}.\vec{v}=\begin{cases} OA\times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA\times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire}\end{cases}$$

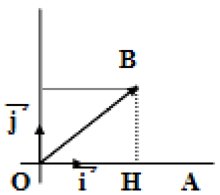
Preuve de l'équivalence de ces quatre expressions :

→ Montrons que $\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$ $= xx' + yy'$ où $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormal quelconque .

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées (x + x' ; y + y') , donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ $= (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 +x'^2 + 2 x x' + y^2 + y'^2 + 2y y'$

et $\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2)$ $= (x^2 +x'^2 + 2 x x' + y^2 + y'^2 + 2y y' - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2) = x x' + yy'$

→ Montrons que $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ = x x' + y y' où (x ; y) et (x'; y') sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et dans un repère orthonormal bien choisi.



On définit les points O, A et B tels que $\overrightarrow{0A}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{0B}=\vec{v}$, et le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tels que les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{i}$ soient de même direction et de même sens.
On note (x ; y) et (x' ; y') les coordonnées respectivement de $\vec{OA}$ et $\overrightarrow{0B}$ dans ce repère .

On a alors: $x = OA$, $y = 0$, $x' = OB\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ et $y' = OB\sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

Ainsi

$$\begin{aligned} x\,x' + y\,y' &= OA.OB\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) + 0\times OB\sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \\ &= OA.OB\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \\ &= \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v}) \end{aligned}$$

→ Montrons que $OA.OB\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = \begin{cases} OA\times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA\times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

1er cas :

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ alors $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) > 0$ donc $OH = OB\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$

Ainsi, $OA.OB\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = OA\times OH$.

2ème cas :

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) \in]-\pi;-\frac{\pi}{2}] \cup]\frac{\pi}{2};\pi]$ alors $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) < 0$ donc $OB\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = -OH$

Ainsi, $OA.OB\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = -OA\times OH$.

Application:

Pour s'entraîner à calculer le produit scalaire à l'aide de l'une des 4 égalités.

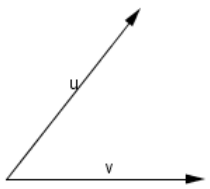
n°1 p276 , n°33 P 278 , n° 35 p 278

B) Remarques

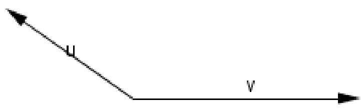
1. Signe du produit scalaire:

Le signe du produit scalaire dépend de la nature de l'angle formé par les vecteurs.

Si $(\vec{u};\vec{v}) \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ alors $\vec{u}.\vec{v} > 0$



Si $(\vec{u};\vec{v}) \in]-\pi;-\frac{\pi}{2}] \cup]\frac{\pi}{2};\pi]$ alors $\vec{u}.\vec{v} < 0$



2. Le produit scalaire de deux vecteurs dépend de leur norme:

Le cosinus d'un angle est un réel compris entre 1 et – 1 , or $\vec{u}.\vec{v} = \|u\|\times\|v\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})$.

On a donc : $-\|u\|\times\|v\| \leq \vec{u}.\vec{v} \leq \|u\|\times\|v\|$

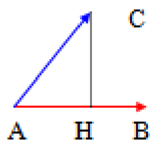
3. Cas particulier : les vecteurs colinéaires

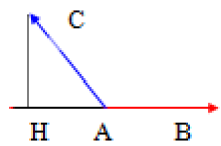
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $\cos(\vec{u};\vec{v})=1$. Ainsi $\vec{u}.\vec{v}=\|u\|\times\|v\|$
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de sens contraire**, alors $\cos(\vec{u};\vec{v})=-1$. Ainsi $\vec{u}.\vec{v}=-\|u\|\times\|v\|$

B) Compléments sur les projections orthogonales

D'après ce qui précède, on a la propriété suivante :

Propriété:
Soient trois points A, B et C du plan, et H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Alors: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$





$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=AB\times AH$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=-AB\times AH$

Remarque: pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs , on peut remplacer l'un deux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.

II. Propriétés

A) Produit scalaire de vecteurs orthogonaux:

Propriété n°1:
Si $\vec{u}.\vec{v}=0$ alors $\vec{u}=0$ ou $\vec{v}=0$ ou $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des directions perpendiculaires.
Dans tous les cas on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

B) Opérations vectorielles

Propriété n°2:

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan, et k un réel donné, alors:

1. $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ (symétrie)
2. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$ (distributivité)
3. $(k\vec{u}).\vec{v}=k(\vec{u}.\vec{v})$ et $\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$

Remarque: $\vec{0}.\vec{u}=\vec{u}.\vec{0}=0$

Preuve :
1. $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$ or $\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos(\vec{v},\vec{u})$ donc $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|\cos(\vec{v},\vec{u})=\vec{v}.\vec{u}$

2. Dans un repère orthonormé donné, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ admettent respectivement comme coordonnées (x, y) ; (x' , y') et (x'' , y'').
   Alors $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=x(x'+x'')+y(y'+y'')=xx'+yy'+xx''+yy''=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

Même démonstration pour $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$.

3. Dans un repère orthonormé donné, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ admettent respectivement comme coordonnées (x, y) ; (x' , y') et (x" , y"), donc $k\vec{u}$ a pour coordonnées (kx ; ky)
Alors $(k\vec{u}).\vec{v}=kx.x'+ky.y'=k(xx'+yy')=k(\vec{u}.\vec{v})$
Même démonstration pour $\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$

C) Carré scalaire et norme

Propriété n° 3:
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, alors : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|=\|\vec{u}\|^2$
Ainsi, si A et B sont deux points du plan, on a: $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

Propriété n° 4:
Soit $\vec{u}$ (x ; y) dans un repère orthonormé donné, alors : $\vec{u}^2=x^2+y^2$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

Propriété n°5: *Conséquence des propriétés précédentes*

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
2. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
3. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$